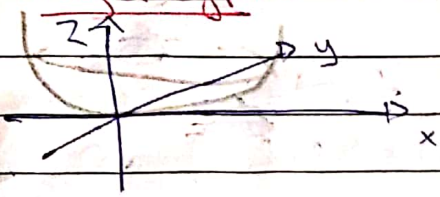
11-12-2020

Παράδειγμα: Έστω $U \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό, $\bar{x} \in U$, $f: U \to \mathbb{R}$, διαφ/μη στο $\bar{x}$. Τότε η κλίση (= παράγωγος) της f στο $\bar{x}$, $Df(\bar{x}) = grad\, f(\bar x) = \nabla f(\bar x) = \left(\frac{\partial f(\bar x)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f(\bar x)}{\partial x_n}\right) \in \mathbb{R}^n$ είναι κάθετη στο σύνολο στάθμης $f(\bar x)$ της f, $L_f(f(\bar x)) = \{\bar y \in U : f(\bar y) = f(\bar x)\}$, στο σημείο $\bar x$.

Παράδειγμα: $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=x^2+y^2$



$\Rightarrow f\in C^1(\mathbb{R}^2)$ αφού $\nabla f(x,y) = (2x,2y)$ και $(x,y)\mapsto x$ και $(x,y)\mapsto y$ είναι συνεχείς [ή αλλιώς η ταυτοτική συνάρτηση $\underbrace{(x,y)\mapsto(x,y)}_{=: \bar g(x,y)}$ είναι συνεχής

[αν $(x_\nu,y_\nu)\to(x_0,y_0)$, τότε $\underbrace{(x_\nu,y_\nu)}\to\underbrace{(x_0,y_0)}$

(όχι: $=\bar g(x_\nu,y_\nu) \to =\bar g(x_0,y_0)$]

και από άλγεβρα συνεχών συναρτήσεων και η $2\bar g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ είναι συνεχής] Άρα:

$Df(x,y) = 2(x,y)\quad \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$

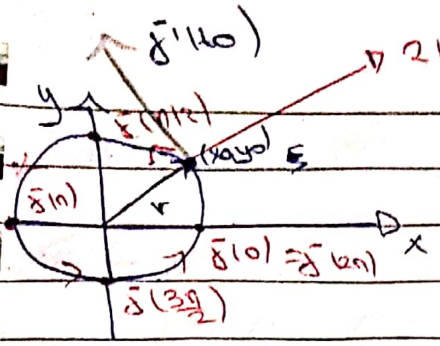
• Ποιο είναι το σύνολο στάθμης $f(x_0,y_0)$ της f?

$L_f(\underbrace{f(x_0,y_0)}_{=x_0^2+y_0^2}) = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \underbrace{f(x,y)}_{=x^2+y^2} = \underbrace{f(x_0,y_0)}_{=x_0^2+y_0^2=:r^2}\} =$

$= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2: x^2+y^2=r^2 (:=x_0^2+y_0^2)\} \ni (x_0,y_0)$

$\Rightarrow$

$L_f(x_0^2+y_0^2)$ = κύκλος κέντρου $(0,0)$, ακτίνας $\sqrt{x_0^2+y_0^2}=r$, $r>0$



$\nabla\ 2(x_0,y_0) = \nabla f(x_0,y_0) = \nabla f(\gamma(t_0))$

$\sqrt{x_0^2+y_0^2} = r = \|(x_0,y_0)\|$

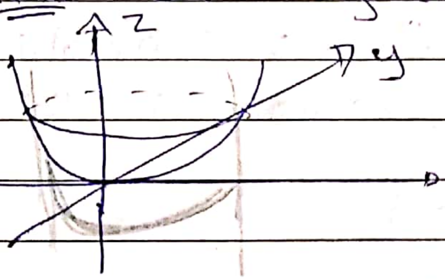
Αυτός ο κύκλος είναι η εικόνα της παραμετρικής καμπύλης:

$\gamma(t) = r(\cos t, \sin t),\ t\in\mathbb{R} \Rightarrow \gamma'(t) = r(-\sin t, \cos t)$

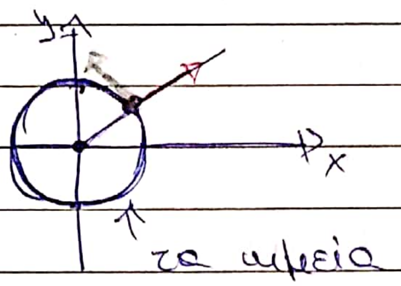
Αν για $t_0\in\mathbb{R}$ έχουμε $\gamma(t_0) = (r\cos t_0, r\sin t_0) = (x_0,y_0)$
τότε $\gamma'(t_0) = (-r\sin t_0, r\cos t_0)$
$= (-y_0, x_0)$: Είναι το εφαπτόμενο διάνυσμα της παραμετρικής καμπύλης $\gamma(t)$ στο σημείο της $\gamma(t_0)$ και διαπιστώνουμε ότι:

$\gamma'(t_0)\cdot\nabla f(\gamma(t_0)) = (-y_0,x_0)\cdot 2(x_0,y_0) = 0$

Παρατήρηση: $\nabla f(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$ [δηλ. στο πεδίο ορισμού, δηλ. πάνω στον "χάρτη" αν η $f(x,y) = x^2+y^2$ περιέγραφε π.χ. τον "κρατήρα ενός ηφαιστείου"]



Περιγράφει την κατεύθυνση της πιο μεγάλης αύξησης της συνάρτησης f ανά μονάδα χώρου. Ενώ το εφαπτόμενο διάνυσμα $\gamma'(t_0)$ στο $\gamma(t_0) = (x_0,y_0)$ δείχνει [πάλι πάνω στον "χάρτη"]

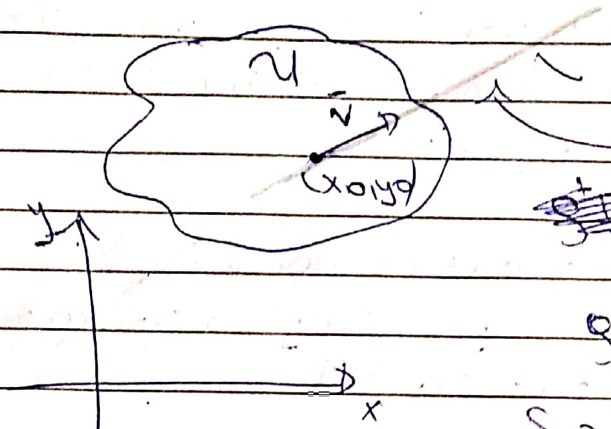


τα σημεία του χάρτη στα οποία είμαστε στο ύψος $f(x_0,y_0)$

σε ποια κατεύθυνση δε θα έχουμε καμία [= μηδενική] μεταβολή. Αυτές οι 2 είναι κάθετες.

Γεωμετρική ερμηνεία της παραγώγου (και όχι της κλίσης)

Έστω $U \subset \mathbb{R}^2$ ανοικτό, $(x_0,y_0) \in U$, $f: U \to \mathbb{R}$ διαφ/μη στο (x_0,y_0). Τότε είδαμε ότι η παράγωγος κατά κατεύθυνση $\underbrace{\bar{v}}_{=(v_1,v_2)} \in \mathbb{R}^2$, $\|\bar{v}\|=1$, στο σημείο (x_0,y_0), δίνει την παράγωγο της συνάρτησης: $g(t) = f((x_0,y_0)+t\bar{v})$, $t \in (-\varepsilon,\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$ στο σημείο $t=0$

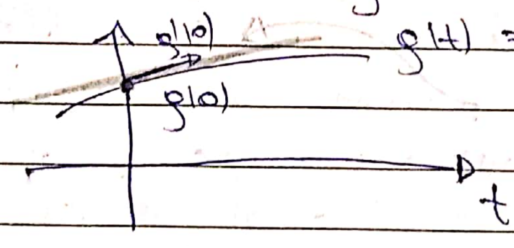


$(x_0,y_0)+t\bar{v}$, $t \in \mathbb{R}$

Εδώ περιορίζεται η f και δίνει τη g

$$g'(0) = \frac{df}{d\bar{v}}(x_0,y_0) = \boxed{Df(x_0,y_0)\cdot\bar{v}}$$

Δηλ. την "κλίση" της εφαπτόμενης ευθείας στο γράφημα της g στο σημείο $g(0) = f(x_0,y_0)$



$$g(t) = f((x_0,y_0)+t\bar{v})$$
$$z = g(0) + t g'(0)$$

Η εφαπτόμενη αυτή ευθεία είναι:

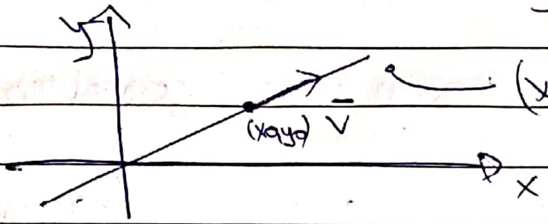
$$z = g(0) + t\underbrace{g'(0)}_{=Df(x_0,y_0)\cdot\bar{v}} = f(x_0,y_0) + t\bar{v}\cdot\nabla f(x_0,y_0)$$

μπορεί να γραφεί και ως:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ f(x_0,y_0) \end{pmatrix} + tv_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{df}{dx}(x_0,y_0) \end{pmatrix} + tv_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{df}{dy}(x_0,y_0) \end{pmatrix}$$

Όπου η ευθεία $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix} + tv_1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + tv_2\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

Είναι η ευθεία στο πεδίο ορισμού της f στην οποία ευθεία περιορίζω την f



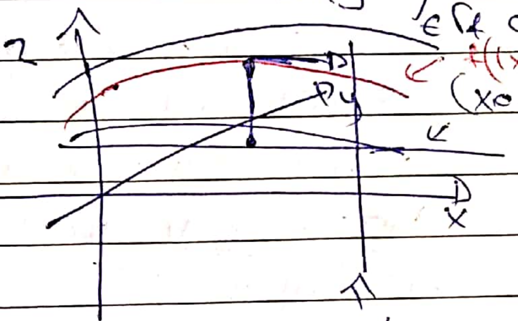
$(x_0,y_0) + t\bar{v}$

Όλες αυτές οι εφαπτόμενες ευθείες βρίσκονται επάνω στο εφαπτόμενο επίπεδο της f στο σημείο $(x_0, y_0, f(x_0,y_0))$ του γραφήματος της $G_f \subset \mathbb{R}^3$ το οποίο δίνεται ως: $z = f(x_0,y_0) + (x-x_0, y-y_0)\cdot \nabla f(x_0,y_0)$

ή [γεωμετρικά]

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_0\\y_0\\f(x_0,y_0)\end{pmatrix} + \overset{*}{(x-x_0)}\begin{pmatrix}1\\0\\\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\end{pmatrix} + \overset{*}{(y-y_0)}\begin{pmatrix}0\\1\\\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\end{pmatrix}$$

$\in G_f \subset \mathbb{R}^3$



διανύσματα που παράγουν το εφ. επ. (Γ.Α.)

$$tv_1\begin{pmatrix}1\\0\\\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\end{pmatrix} + tv_2\begin{pmatrix}0\\1\\\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\end{pmatrix}$$

(*) Αφού η εφαπτόμενη ευθεία για τη συνάρτηση: $g(t) = f((x_0,y_0)+t\bar{v})$ στο $g(0) = f(x_0,y_0)$ έχει: $(x,y) = (x_0,y_0) + t\bar{v} \Leftrightarrow (x-x_0, y-y_0) = t\bar{v}$, βλέπουμε ότι η ευθεία αυτή:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ f(x_0,y_0) \end{pmatrix} + t v_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{df}{dx}(x_0,y_0) \end{pmatrix} + t v_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{df}{dy}(x_0,y_0) \end{pmatrix},$$

$, t \in \mathbb{R}$

Βρίσκεται $\forall\, \bar{v} \in \mathbb{R}^2$, $\|\bar{v}\| = 1$ πάνω στο εφαπτόμενο επίπεδο:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ f(x_0,y_0) \end{pmatrix} + (x-x_0) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{df}{dx}(x_0,y_0) \end{pmatrix} + (y-y_0) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{df}{dy}(x_0,y_0) \end{pmatrix}$$

$(x,y) \in \mathbb{R}^2$

ΟΛΑ ΑΥΤΑ ΜΟΝΟ ΓΙΑ f ΔΙΑΦΟΡΙΣΙΜΗ !!!

Παρατήρηση: Μόνο αν f διαφ/μη μιλάμε για εφαπτόμενο επίπεδο

* Το "αλγεβρικό αντίστοιχο" αυτής της γεωμετρικής ερμηνείας της διαφορισιμότητας είναι ότι η παράγωγος μιας διαφορίσιμης πραγματικής συνάρτησης δίνει τη "βέλτιστη" γραμμική προσέγγιση στην f στο σημείο όπου η f είναι διαφορίσιμη.

Για $n=2$ (ισχύει γενικά): $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ διαφ. στο (x_0,y_0) : $\Leftrightarrow$

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{\overbrace{f(x,y) - f(x_0,y_0) - Df(x_0,y_0)\cdot(x-x_0, y-y_0)}^{=:\varphi(x-x_0,\,y-y_0)}}{\|(x-y_0, y-y_0)\|} = 0$$

$$\Leftrightarrow f(x,y) = f(x_0,y_0) + Df(x_0,y_0)\cdot(x-x_0, y-y_0) + \varphi(x-x_0, y-y_0)$$

με $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \dfrac{\varphi(x-x_0, y-y_0)}{\|(x-x_0, y-y_0)\|} = 0$

κοντά στο (x_0,y_0)

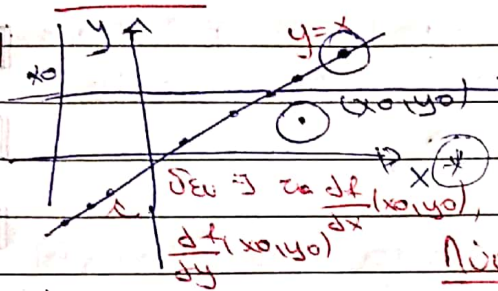
Για το τελευταίο δείτε την αντιστοιχία με παράγωγο πραγματικής συνάρτησης μιας πραγμ. μεταβλ.

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x) \iff \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)-f'(x)\cdot h}{h}=0$$

$$\iff f(x+h)=f(x)+f'(x)h+g(h) \text{ με } \lim_{h\to 0}\frac{g(h)}{h}=0$$

συνάρτηση $h\mapsto f(x+h)$ (κοντά στο x) — γραμμική συνάρτηση $h\mapsto f'(x)h$ (κοντά στο x)

Ασκ. 5.11 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=\begin{cases} e^x-1, & y=x \\ 0, & y\neq x\end{cases}$



(α) f μερικώς διαφ/μη μόνο σε σημεία $y\neq x$ και στο σημείο $(0,0)$

Λύση:

Η ευθεία $y=x$, $x\in\mathbb{R}$ είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$

[αν $y_\nu=x_\nu$ και $(x_\nu,y_\nu)\to(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$, τότε αφού $\Rightarrow \begin{cases} x_\nu\to x_0 \\ y_\nu\to y_0\end{cases}$, δηλ. $y_0=x_0$]

$\Rightarrow$ το σύνολο $\mathbb{R}^2\setminus\{y=x\}$ είναι ανοιχτό

$\Rightarrow$ γύρω από κάθε (x_0,y_0) με $x_0\neq y_0$ υπάρχει ανοιχτή μπάλα κέντρου (x_0,y_0), δηλαδή $\varepsilon>0$ με $B((x_0,y_0),\varepsilon)\subset\mathbb{R}^2\setminus\{y=x\}$

και $\forall (x,y)\in B((x_0,y_0),\varepsilon): f(x,y)=0 \Rightarrow$ η f είναι σταθερή γύρω από το (x_0,y_0) (*) $\longrightarrow$

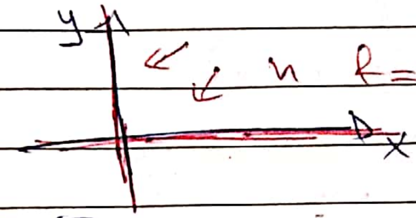
(*) Προς όλες τις κατευθύνσεις [αν εξετάζω τη συνέχεια, διαφ/τα κλπ μιας συνάρτησης σε ένα σημείο του π.ο. της, και αυτή είναι σταθερή σε ανοιχτή περιοχή του σημείου, τότε αρκεί να εξετάσω το περιορισμό της συνάρτησης στην περιοχή αυτή]

Άρα για $x_0 \neq y_0$: $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = 0$ και

$Df(x_0,y_0) = \nabla f(x_0,y_0) = (0,0)$

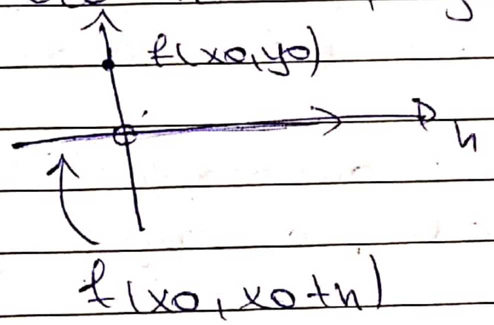
Επίσης για $(x_0,y_0) = (0,0)$ έχουμε: $f(x_0,y_0) = f(0,0) = e^0 - 1 = 0$ και:

$f(h,0) = f(0,h) = 0, \ \forall h \neq 0 \Rightarrow \nabla f(0,0) = (0,0)$ [δεν ξέραμε αν είναι παραγωγίσιμη]



η $f=0$ (όχι μόνο εδώ)

(*) αφού οι συναρτήσεις $h \mapsto f(x_0+h,y_0)$ και $h \mapsto f(x_0,y_0+h)$ για $x_0 = y_0 \neq 0$, όπου $f(x_0,y_0)=0$, είναι ασυνεχείς στο $h=0$, αφού $f(x_0, x_0+h) = 0 \ \forall h \neq 0$

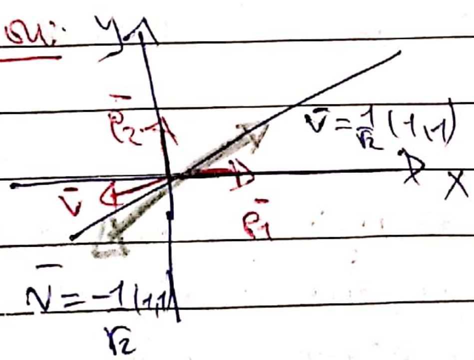


[και αντίστοιχα για $f(x_0+h,x_0)$] και συνεπώς δεν είναι διαφορίσιμες στο $h=0$

(β) $\forall \bar{v} \in \mathbb{R}^2, \ \|\bar{v}\| = 1$:

$\exists \frac{\partial f}{\partial \bar{v}}(0,0) \in \mathbb{R}$

Λύση:



Για όλες τις κατευθύνσεις $\bar{v}$ εκτός από $\bar{v} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$

Έχουμε $h \mapsto f((0,0)+t(v_1,v_2)) = f(hv_1, hv_2)$

με $hv_1 \neq hv_2 \Leftrightarrow v_1 \neq v_2$ [Αφού $v_1 = v_2$ και $\|\bar{v}\| = v_1^2 + v_2^2 = 1 \Leftrightarrow 2v_1^2 = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow v_1 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \bar{v} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$

και είπαμε ότι εξαιρούμε αυτές τις κατευθύνσεις]

$f(hv_1, hv_2) = 0 \ \forall h \neq 0$. Επίσης $f(0,0)=0$. Άρα οι πιο πάνω συναρτήσεις του h είναι σταθερές $=0 \Rightarrow$ $\Rightarrow$ είναι διαφορίσιμες ως προς h με παράγωγο $=0$ = κατευθυνόμενη παραγ.

Συνοψίζουμε: • για $\bar{v} \neq \pm \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$: $\frac{df}{d\bar{v}}(0,0) = 0$

• για $\bar{v} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1) \Rightarrow v_1 = v_2 \Rightarrow h \mapsto f((0,0)+h\bar{v}) = f(h\bar{v}) = f\left(h\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right), h\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)$

$= \underbrace{e^{\pm\frac{1}{\sqrt{2}}h} - 1}_{=:g(h)} \ \forall h \in \mathbb{R}$, $\frac{df}{d\bar{v}}(0,0) = g'(0)$,

όπου $g'(h) = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} e^{\pm\frac{1}{\sqrt{2}}h} \Rightarrow g'(0) = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

Άρα:

$$\frac{df}{d\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)\right)}(0,0) = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \neq 0 = \underbrace{\nabla f(0,0)}_{=(0,0)} \cdot \left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)\right)$$

(βλ. προηγ. σελ.)